

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ им.Л.В.КИРЕНСКОГО

Препринт № 467Ф

РЕСТАВРАЦИЯ СИГНАЛОВ И СВЕРХРАЗРЕШЕНИЕ

Б.А.Кравцов, Р.Ф.Миненкова

Красноярск - 1988

Рассмотрены основные алгоритмы реставрации сигналов, т.е. методы апостериорной компенсации искажений, вносимых в сигнал в процессе его измерения. Обсуждаются прикладные аспекты нового метода аналитического продолжения спектра, определяется сфера его применимости и приводятся результаты моделирования сверхразрешения на ЭЕМ.

Для специалистов по цифровой обработке сигналов.

© Институт физики СО АН СССР, Красноярск

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена реставрации сигнала - классической проблеме, поставленной Релеем свыше ста лет тому назад. Повышенный интерес к ней сегодня объясняется, по-видимому, внедрением вычислительных устройств в технику эксперимента и созданием ряда новых перспективных теоретических направлений (см. [1-4]).

Измеряемый сигнал взаимодействует с физическим прибором (без такого взаимодействия измерения вообще невозможно) и, как следствие, искажается. Задача состоит в восстановлении исходного сигнала на входе прибора по искаженному выходному сигналу и характеристикам прибора. Речь, таким образом, идет о последующей обработке выходного сигнала, которая повышает качество измерения.

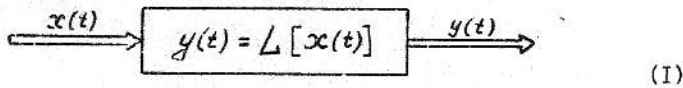
В первой части мы даем строгую постановку проблемы реставрации в частном случае линейного прибора. Здесь изложены общие схемы обработки, получены некоторые полезные соотношения и основные идеи продемонстрированы в вычислительном эксперименте. Вторая часть основана на недавно полученных теоретических результатах Л.А. Айзенберга [5,6]. Мы обсуждаем прикладные аспекты предложенной им формулы аналитического продолжения и показываем конструктивность этого подхода к проблеме реставрации.

Изложение рассчитано на научных работников и инженеров, интересующихся вопросами цифровой обработки сигналов.

ЧАСТЬ I

I. Основное уравнение. Обозначим через $x(t)$ входной сигнал, измеряемый прибором, а через $y(t)$ - выходной сигнал или отклик, фиксируемый экспериментатором. Для простоты и определенности мы рассматриваем действительные одномерные сигналы, зависящие от времени, но эти допущения не существенны и аналогичные выводы будут справедливы, к примеру, при обработке изображений.

Как отмечалось, прибор моделируется линейной системой, для которой справедлив принцип суперпозиции (I):



$$L \left[\sum_i c_i x_i(t) \right] = \sum_i c_i y_i(t)$$

Введем $h(t, \tau)$ - отклик прибора на единичный импульс, поданный на вход в момент времени τ . Функция $h(t, \tau)$ исчерпывающе характеризует поведение линейного прибора и, в зависимости от предметной области, именуется по-разному: весовая функция, аппаратная функция, функция рассеяния точки, функция Грина и т.д.

По определению,

$$h(t, \tau) = L[\delta(t - \tau)], \quad \delta(t) - \text{дельта-функция.}$$

Представим входной сигнал как сумму смещенных единичных импульсов $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$. Тогда, по принципу суперпозиции, на выходе прибора имеем:

$$L[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) L[\delta(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x(\tau) d\tau = y(t) \quad (2)$$

Полученное интегральное уравнение Фредгольма I-го рода с ядром

$h(t, \tau)$ представляет общее соотношение, связывающее воедино входной сигнал, выходной сигнал и весовую функцию $h(t, \tau)$. Логично предположить, что величина отклика прибора зависит лишь от промежутка времени, прошедшего с момента подачи импульса (условие однородности), т.е. $h(t, \tau) = h(t - \tau)$. С учетом этого допущения, уравнение (2) сводится к основному уравнению линейного однородного прибора - уравнению типа свертки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau = h(t) * x(t) = y(t) \quad (2a)$$

2. Решение основного уравнения и характеристики прибора в частотной области.

Для решения (2a) обычно применяют методы операционного исчисления, с использованием преобразований Фурье (ПФ):

$$F[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad - \text{ прямое ПФ}$$

$$F^{-1}[X(f)] = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df \quad - \text{ обратное ПФ}$$

Так как Фурье-образ свертки двух функций равен произведению их Фурье-образов, из (2a) следует:

$$H(f) \cdot X(f) = Y(f) \quad (3)$$

откуда получаем решение основного уравнения

$$x(t) = F^{-1} \left[\frac{Y(f)}{H(f)} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(f)}{H(f)} e^{i2\pi ft} df, \quad \text{когда } H(f) \neq 0 \quad (4)$$

Определения

а). ПФ весовой функции $h(t-\tau)$ - называется передаточной функцией прибора $H(f)$. Эту комплекснозначную функцию действительного аргумента $H(f) = |H(f)|e^{i\Phi(f)}$ трудно показать на рисунке. Поэтому отдельно изображают её модуль $|H(f)|$, называемый коэффициентом усиления, и аргумент (фазу) $\Phi(f)$. Можно показать, что коэффициент усиления - четная, а фаза - нечетная функция.

б). Частота среза f_c определяется соотношением

$$H(f) = 0, \text{ если } |f| > f_c$$

в). Симметричный интервал $(-f_c, f_c)$ - полоса пропускания прибора. Частотные составляющие входного сигнала, лежащие вне полосы пропускания, не участвуют, как следует из (3), в формировании отклика. Прибор действует как низкочастотный фильтр и этим, в основном, обусловлены его искажения.

Если весовая функция характеризует прибор во временной области, то в частотной области используют понятия, приведенные выше.

3. Эффекты ограничения полосы частот

Прибор идеален, когда $y(t) = x(t)$. По определению весовой функции, это означает, что $h(t-\tau) = \delta(t-\tau)$ и, следовательно, передаточная функция $H(f) = 1$ на всех частотах. Но в реальной ситуации коэффициент усиления зависит от частоты и высокочастотная часть спектра $X(f)$ подавляется прибором. Чтоб исследовать основные эффекты ограничения по полосе частот, смоделируем прибор идеальным низкочастотным фильтром с $f_c = P$:

$$H_c(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{P}\right), \quad \text{rect}(x) \equiv \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Весовая функция такого "реального" прибора

$$h_c(t-\tau) = 2P \text{sinc}[2\pi P(t-\tau)]$$

(здесь $\text{sinc}(x) = x^{-1} \sin(x)$) и далее, согласно (2а), его выход

$$y(t) = 2P \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}[2\pi P(t-\tau)] x(\tau) d\tau \quad (5)$$

Воспользуемся (5), чтоб исследовать как ограничение по полосе частот сказывается на разрешении двух импульсных сигналов

$$x_1(t) = \delta(t-\tau_1) \quad \text{и} \quad x_2(t) = \delta(t-\tau_2)$$

Очевидно,

$$y_1(t) = 2P \text{sinc}[2\pi P(t-\tau_1)]$$

$$y_2(t) = 2P \text{sinc}[2\pi P(t-\tau_2)]$$

т.е. на выходе каждый импульс "расплывается", амплитуда и ширина центрального выступа связаны обратной зависимостью и равны соответственно $2P$ и P^{-1} . Понятно, что при определенном P импульсы сольются и станут неразличимы. По Рэлею (см. [7]; стр. 306), импульсные сигналы разрешаются прибором, если отношение величины седловины между ними к амплитуде сигнала меньше $8\pi^{-2}$. Минимальное расстояние между различными сигналами называется расстоянием Рэля R .

Найдем R при заданном P . Введем удобную симметричную систему координат и расположим импульсы на расстоянии Рэля друг от друга (рис.1).

По определению R , $y_2(0)/y_2(\frac{R}{2}) = \text{sinc}(\pi PR) = 8\pi^{-2}$ и, следовательно, $PR = \gamma - \text{const}$

Общий вывод состоит в том, что полоса частот и расстояние Рэля связаны обратной зависимостью. Как показали наши расчеты,

$\mu = 0.349766$ и поэтому, к примеру, для разрешения импульсов, следующих с интервалом в 1 микросекунду, необходим прибор с полосой $P > 349$ гц; прибор с полосой частот 1 мгц разрешает импульсы, следующие не чаще 0.349×10^{-6} сек.

4. Сверхразрешение

По формуле (3) можно вычислить спектр входного сигнала $X(f)$ только внутри полосы пропускания. Но замечательным фактом следует признать возможность оценить этот же спектр и вне полосы пропускания. В случае удачной экстраполяции, мы как бы увеличиваем частоту среза прибора f_c и, тем самым, пропорционально улучшаем его разрешение. В этом состоит идея сверхразрешения. Теоретической основой сверхразрешения служит важный результат теории аналитических функций, известный как

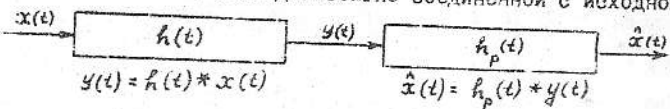
Теорема Винера-Пэли (частный случай):

Если сигнал $x(t)$ финитен, т.е. $x(t) = 0$ при $|t| > T$, и непрерывен при $|t| \leq T$, то спектр сигнала $X(f)$ является целой функцией.

Последнее, в частности, означает, что функция $X(f)$ полностью определяется любым своим интервалом и может быть восстановлена за его границами методами аналитического продолжения.

5. Борьба с шумами

К сожалению, решение задачи реставрации по формуле (4) на практике почти всегда оказывается бесполезным. Это объясняется обычной зашумленностью выходного сигнала $y(t)$. Для доказательства, представим процесс реставрации, как преобразование в другой линейной системе, последовательно соединенной с исходной.



Здесь $\hat{x}(t)$ и $h_p(t)$ соответственно выходной сигнал и весовая функция системы реставрации. Поскольку $\hat{x}(t) = [h_p(t) * h(t)] * x(t)$ и при полном восстановлении $\hat{x}(t) = x(t)$, имеем $h_p(t) * h(t) = \delta(t)$ и $H_p(f) = 1/H(f)$. Коэффициент усиления исходной системы $|H(f)|$ убывает с ростом частоты, поэтому система реставрации компенсирует это соответственным увеличением $|H_p(f)|$. Таким образом, если на выходной сигнал $y(t)$ накладывается высокочастотная помеха, она заметно усиливается при реставрации. Очевидный способ борьбы с таким явлением состоит в корректировке $H_p(f)$ на высоких частотах, коэффициент усиления здесь можно плавно уменьшать до нуля или просто занулить, начиная с определенной частоты среза f_c .

Запишем

$$H_p(f) = \frac{1}{H(f)} \cdot W(f)$$

где $W(f)$ - корректирующий множитель. Разные методы, основанные на фильтрации высокочастотных помех, отличаются конкретным выбором $W(f)$ при единой схеме реставрации (6):

$$\hat{x}(t) = \mathcal{F}^{-1} [H_p(f) \cdot Y(f)] = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{Y(f)}{H(f)} \cdot W(f) \right] \quad (6)$$

а) $W(f) = 1$ - инверсная фильтрация

Метод сверхчувствителен к шуму при высокой эффективности обработки сигнала. Применяется, когда отсутствует ограничение по полосе частот. В работе [8] рассмотрен положительный пример реставрации фотоизображения лунного кратера, смазанного из-за турбулентности земной атмосферы.

б) $W(f) = \text{sact}(f/f_c)$ - инверсная фильтрация с ограничением полосы частот;

f_c - частота среза

Простейший способ борьбы с шумами, приводящий к паразитным оцилляциям реставрированного сигнала $\hat{x}(t)$, вследствие явления Гиббса (см. [9,10]).

в) $W(f) = \frac{|H(f)|^2}{|H(f)|^2 + \alpha f^{2z}}$ - метод регуляризации Тихонова (см. [1,4]);

α - параметр регуляризации;

z - натуральное

В отличие от предыдущего, метод Тихонова обеспечивает плавный спад $|H_p(f)|$ с ростом частоты; параметры α и z определяют при этом эффективную полосу частот. Паразитные оцилляции выражены слабо.

Общий недостаток всех методов фильтрации обусловлен сокращением эффективной полосы частот, при этом возникает известный компромисс между зашумленностью и разрешением сигнала. Как следствие, только высокочастотный шум, когда сокращение полосы частот не превышает разумных пределов, составляет сферу применимости указанных методов. Высокочастотный шум порождается, в частности, при оцифровке сигналов в аналого-цифровых преобразователях систем автоматизации и при компьютерной обработке, т.е. связан с квантованием (округлением) сигнала в соответствии с разрядностью цифровых устройств.

Кроме шумов квантования, возникающих в самой установке, возможно и проникновение шумов извне, в виде помехи определенного частотного диапазона. В этом случае, можно воспользоваться идеями сверхразрешения - правильной экстраполяции спектра сигнала с незашумленного участка на частотный диапазон, занимаемый помехой, полностью устраняет помеху, нисколько не поступившись разрешением.

Не играет роли и соотношение сигнал/шум.

К сожалению, такой подход неприменим в наиболее распространенном случае - шумах квантования. Хотя, как отмечалось, такой шум проявляется в основном на высоких частотах, но в определенной степени искажаются и все остальные. Способ вычисления спектра дискретного сигнала с целью последующей экстраполяции описан ниже (см. ч.П, п.9).

6. Вычислительный эксперимент

а) Моделировалось прохождение входного сигнала в виде двух прямоугольных импульсов

$$x(t) = \begin{cases} 8, & t \in a \\ 0, & t \notin a \end{cases} \quad a: \{[7, 7.5] \cup [8.5, 9]\}$$

через линейный прибор с гауссовой весовой функцией

$$h(t-\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\tau)^2}{2\sigma^2}\right], \quad \text{при } \tau=8, \sigma=3$$

Дискретизация функций производилась на интервале $t \in [0,16]$ с шагом $\Delta t = 0.125$ сек. Шум квантования порождался округлением выходного сигнала $y(t)$ до второго знака после запятой.

Неприменимость реставрации по методу инверсионной фильтрации, при зашумленном $y(t)$, иллюстрирует рис.2. Заметим, что при меньшем уровне шума, например, при округлении до четвертого знака, результат вполне удовлетворителен.

Инверсная фильтрация с ограничением полосы частот показана на рисунках 3а,4а. Частоты среза в первом и во втором случае равны соответственно $f_c = 0.875$ гц и $f_c = 0.5$ гц. Обрезание высоких частот подавляет шум, но сопровождается потерей разре-

нения. На рисунках 3б и 4б показаны для сравнения истинный спектр $X(f)$ и $\hat{X}(f)$, рассчитанный по схеме (6). Видно, что шумы квантования практически не затрагивают низкие частоты.

Лучшие результаты дала реставрация по методу Тихонова; параметры $\alpha = 10^{-5}$, $\tau = 1$ (см. рис. 6а, б). Минимальная невязка в этом случае обусловлена, в первую очередь, меньшим размахом боковых лепестков.

б) Кроме шумов квантования, изучалось действие внешней помехи, в виде паразитной осцилляции $n(t) = A(\sin 2\pi f_1 t + \sin 2\pi f_2 t)$, $A = 5 \times 10^{-3}$, $f_1 = 0.3125$ гц, $f_2 = 0.3750$ гц, накладываемой на выходной сигнал $y(t)$. Методы фильтрации в этом случае оказываются неэффективными, т.к. зашумлена низкочастотная область спектра. Отфильтровав методом Тихонова только верхнюю частоту f_2 , мы необратимо проиграли в разрешении (см. рис. 6а, б).

Реставрация, основанная на аналитическом продолжении спектра, показана на рис. 7. Мы экстраполировали $X(f)$ с незашумленного участка $[0, 0.25]$ гц до значения $f_2 = 0.3750$ гц, что можно трактовать и как расширение полосы пропускания прибора в 1.5 раза. Подробности обсуждаются ниже, в части II.

ЧАСТЬ II

7. Формула экстраполяции Айзенберга

Недавно Л.А. Айзенбергом была получена простая формула аналитического продолжения для функций некоторого класса, аналитических в произведении полуплоскостей или полос 5, 6. В частности, эта формула применима и для экстраполяции спектра Фурье финитного сигнала. Если значение спектра f известно на отдельных частотах x_1, \dots, x_m , то его можно оценить на любой частоте x по формуле Айзенберга:

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m f(x_k) \frac{-\rho i \sigma}{x - x_k - \rho i \sigma} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{(x - x_j)(x_k - x_j - \rho i \sigma)}{(x - x_j - \rho i \sigma)(x_k - x_j)} \quad (7)$$

$\sigma > 0$ - параметр, i - мнимая единица.

В качестве примера, на рис. 6 пунктиром показана экстраполяция $f(x) = \frac{1 - \exp(-i4\pi^2 x)}{1 - 4\pi^2 x^2}$ (спектр синусоидального сигнала на отрезке от 0 до 2σ). Исходные значения $f(x)$ задавались в $m=10$ точках, начиная с нуля, с постоянным шагом $\Delta = 0.0177$; $\sigma = 0.23$. Эти точки отделены от интервала экстраполяции вертикальной чертой. Штрих-пунктиром показана экстраполяция уравнением (8).

8. Следствия

Полученные ниже следствия могут оказаться полезным при практическом использовании формулы Айзенберга (см. [II]).

а) Пусть значения спектра известны на первых m частотах x_0, \dots, x_{m-1} взятых с постоянным шагом Δ , т.е. $x_k = k\Delta$, $k = 0, \dots, m-1$. Этот случай наиболее распространен на практике. Тогда,

$$\hat{f}(l\Delta) = \sum_{k=0}^{m-1} C_k^{(l)} f(k\Delta), \quad l = 0, 1, \dots \quad (7a)$$

$$C_k^{(l)} = \frac{\rho}{k-l+\rho} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{m-1} \frac{j(j-k-l)+kl+\rho(j-l)}{j(j-k-l)+kl+\rho(j-k)}, \quad \rho \equiv \frac{2i\sigma}{\Delta}$$

Здесь $\hat{f}(l\Delta)$ - вычисленное значение спектра на частоте $l\Delta$, которое несколько отличается от точного значения $f(l\Delta)$, вследствие конечности m . При $l=0, 1, \dots, m-1$ получаем заданные значения \hat{f} , затем, при $l=m, m+1, \dots$ имеет место экстраполяция на один, два и т.д. отсчетов.

В вычислительном эксперименте мы применили (7а) с параметрами $m=21$ и $|\rho|=34.56$, т.е. отсчеты брались с шагом $\Delta=0.0125$ гц. При этом, при вычислении спектров, мы не пользовались стандартными процедурами быстрого преобразования Фурье. Во-первых, точность ЕПФ обычно оказывается недостаточной (получаемая функция выходит за границы нужного класса) и, во-вторых, желательно знать спектр Фурье на заданном интервале с произвольным шагом Δ . Поэтому мы заменяли дискретный сигнал на непрерывный ступенчатый. От каждого звена непрерывного сигнала спектр вычислялся точно (как спектр прямоугольника) и, затем, суммировались полученные элементарные спектры звеньев.

б) Чтоб не пересчитывать коэффициенты C_k для каждого следующего отсчета, можно использовать предварительно вычисленные значения спектра. При этом, диапазон правильной экстраполяции незначительно сокращается (см. рис. 8), зато резко возрастает скорость вычислений.

Полагая в (7а) $l=m$,

$$\hat{f}(m\Delta) = \sum_{k=0}^{m-1} C_k^{(m)} f(k\Delta), \quad (7б)$$

$$C_k^{(m)} = \frac{\rho}{k-m+\rho} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{m-1} \frac{j(j-k-m) + km + \rho(j-m)}{j(j-k-m) + km + \rho(j-k)}$$

и, с учетом инвариантности к сдвигу $\hat{f}(n\Delta+m\Delta) = \sum_{k=0}^{m-1} C_k^{(m)} \hat{f}(n\Delta+k\Delta)$, (7б) можно представить в виде линейного разностного уравнения m -го порядка:

$$\hat{f}(n\Delta+m\Delta) - a_1 \hat{f}(n\Delta+(m-1)\Delta) - \dots - a_m \hat{f}(n\Delta) = 0, \quad (8)$$

$$a_{m-k} = C_k^{(m)}, \quad k=0, 1, \dots, m-1$$

с начальными условиями $\hat{f}(0) = f(x_0), \hat{f}(\Delta) = f(x_1), \dots, \hat{f}[(m-1)\Delta] = f(x_{m-1})$. Теперь экстраполяция сводится к численному решению (8) для $n=0, 1, \dots$. При этом обычно пользуются рекурсией, но можно выписать решение и в аналитическом виде.

Решение (8) ищем в форме $\hat{f}(n\Delta) = z^n$, где z - комплексная постоянная, отличная от нуля. Последующая подстановка приводит к характеристическому уравнению:

$$z^m - a_1 z^{m-1} - \dots - a_m = 0$$

и, в случае простых корней z_1, z_2, \dots, z_m , общее решение (8) принимает вид:

$$\hat{f}(n\Delta) = b_1 z_1^n + b_2 z_2^n + \dots + b_m z_m^n$$

где коэффициенты b_i определяются из начальных условий. Для устойчивости решения, очевидно, необходимо $|z_i| < 1, i=1, \dots, m$. В свою очередь, это налагает условие при выборе параметров экстраполяции m и ρ , от которых зависят коэффициенты разностного уравнения.

Для нахождения b_i , запишем

$$\left. \begin{aligned} f(x_0) &= b_1 + b_2 + \dots + b_m \\ f(x_1) &= b_1 z_1 + b_2 z_2 + \dots + b_m z_m \\ &\vdots \\ f(x_{m-1}) &= b_1 z_1^{m-1} + b_2 z_2^{m-1} + \dots + b_m z_m^{m-1} \end{aligned} \right\}$$

- Определитель Вандермонда полученной системы уравнений допускает эффективное вычисление

$$\det = \prod_{1 \leq j < i \leq m} (x_i - x_j)$$

и, следовательно, при близости корней система плохо обусловлена.

в) Любые последовательные m отсчетов точной функции $f(l\Delta)$ хорошо согласуются с (8), а вычисленные по (7а) последовательные отсчеты $\hat{f}(l\Delta)$ согласуются с (8) в случае корректной экстраполяции. Поэтому для контроля вычислений целесообразно ввести функцию ошибки

$$\text{err}(l\Delta) = \left| \hat{f}(l\Delta) - \sum_{k=1}^m a_k \hat{f}(l\Delta - k\Delta) \right|, \quad l = m, m+1, \dots \quad (9)$$

малость которой дает необходимое условие применимости (7а). Параметры экстраполяции m и ρ подбираются таким образом, чтобы (9) оставалась малой при возможно больших l .

В работе [6] работоспособность (9) подтверждается на конкретном примере.

г) Для изучения линейных формул численного анализа удобен частотный подход, предложенный Хеммингом [9,10]. Следуя ему, представим (8) в форме нерекурсивного фильтра:

$$u(n\Delta) = f(n\Delta) = \sum_{k=1}^m a_k f(n\Delta - k\Delta), \quad n = m, m-1, \dots \quad (10)$$

Теперь процесс экстраполяции можно трактовать как прохождение последовательности отсчетов функции f через цифровой фильтр. Найдем передаточную функцию этого фильтра (не путать с передаточной функцией прибора), для чего на его вход подадим одиночную гармонику $f_s(n\Delta) = e^{i2\pi\nu n\Delta}$. На выходе фильтра имеем:

$$u(n\Delta) = \sum_{k=1}^m a_k e^{i2\pi\nu(n\Delta - k\Delta)} = \sum_{k=1}^m a_k e^{-i2\pi\nu k\Delta} \cdot e^{i2\pi\nu n\Delta}$$

и, таким образом, амплитуда гармоники частоты ν изменяется в $H(\nu) = \sum_{k=1}^m a_k e^{-i2\pi\nu k\Delta}$ раз. Передаточная функция $H(\nu)$ описывает изменение спектра экстраполируемой функции в процессе экстраполяции.

На рис.9 показаны передаточные функции для конкретных значений параметров. Только низкие частоты передаются без заметных искажений; характер искажений высокочастотной области спектра обуславливает пределы применимости (10).

По аналогии, выпишем передаточную функцию алгоритма экстраполяции (7а)

$$H(\nu) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k^{(\ell)} e^{i2\pi\nu k\Delta}$$

Экспериментально показано, что с возрастанием ℓ (при постоянных m и ρ) диапазон частот, передаваемых без искажений, сужается. Кроме того, из вида $H(\nu) \Big|_{\nu=0}$, следует

$$\sum_{k=0}^{m-1} c_k^{(\ell)} = 1$$

10. Замечания по реализации

Рассмотренные алгоритмы достаточно чувствительны к точности вычислений. Первоначально, при работе на ЕС-машине, успешно применялся стандартный фортран, но с переходом на мини-машину, используемую для оперативной обработки экспериментальных данных, возникли затруднения. К сожалению, во всех существующих здесь компиляторах фортрана, включая фортран-77, отсутствует комплексная арифметика с двойной точностью. Поэтому удобным оказался переход

на оптимизирующий паскаль-2, предварительно дописав к нему соответствующее расширение. Время выполнения программы реставрации, основанной на экстраполяции спектра, составило не более 20 минут работы ЭВМ СМ-4.

Определенные преимущества и в плане эффективности и в плане реализации имеет язык Си. Отметим также, что во всех версиях ОС *Unix* содержится библиотека программ для вычислений с произвольной точностью.

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.- М.:Наука, 1979.- 285 с.
2. Frieden B.R. Band-unlimited Reconstruction of Optical Objects and Spectra. - J.Opt.Soc.Amer., 1967, v.57, p.1013-1019.
3. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Фinitные функции в физике и технике.- М.:Наука, 1971. -408 с.
4. Василенко Г.И., Тараторин А.М. Восстановление изображений.- М.:Радио и связь, 1986. -302 с.
5. Айзенберг Л.А. Экстраполяция функций, голоморфных в производстве полуплоскостей или полос. Аналитическое продолжение спектра.-ДАН СССР, 1986, т.290, №2, с.265-268.
6. Айзенберг Л.А., Кравцов Б.А. Вычислительный эксперимент по сверхразрешению физических приборов экстраполяцией спектра Фурье одномерных фinitных сигналов.- Письма в ЖТФ, 1987, т.13, №19, с.1193-1197.
7. Борн М., Вольф Э. Основы оптики.-М.:Наука, 1973. - 719 с.
8. Фриден Б.Р. Улучшение и реставрация изображений. -В кн.: Обработка изображений и цифровая фильтрация. Под ред. Т.Хуанга. Пер. с англ. -М.:Мир, 1979. - 318 с.
9. Хемминг Р.В. Численные методы.-М.:Наука, 1972. -400 с.

10. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры.-М.:Советское радио, 1980.-224с.
11. Кравцов Б.А. Вычислительные аспекты метода экстраполяции Айзенберга. -В кн.:Комплексный анализ и математическая физика.-Красноярск, 1987, с.52.

Academy + No
Baltica
Cyrillic

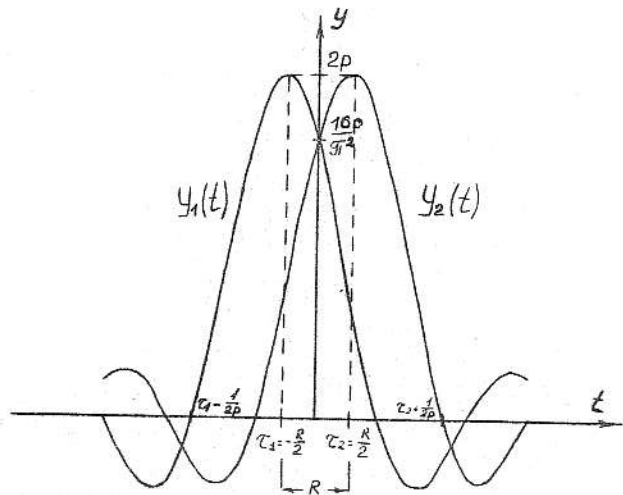


Рис.1. К выводу взаимозависимости расстояния Рэлея и полосы пропускания прибора

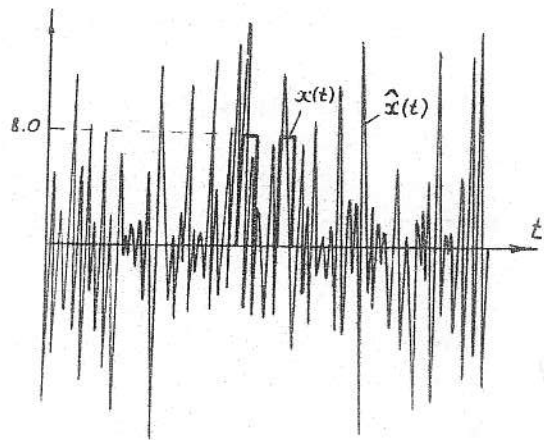
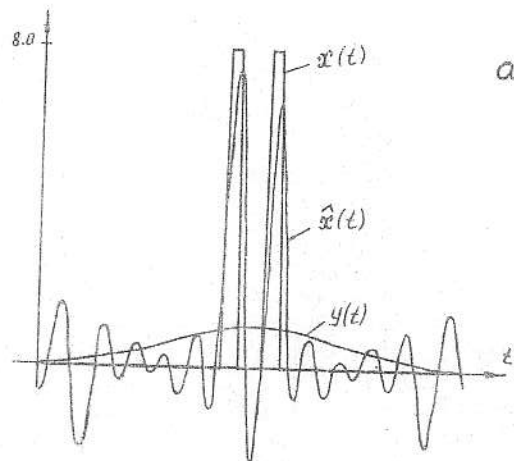
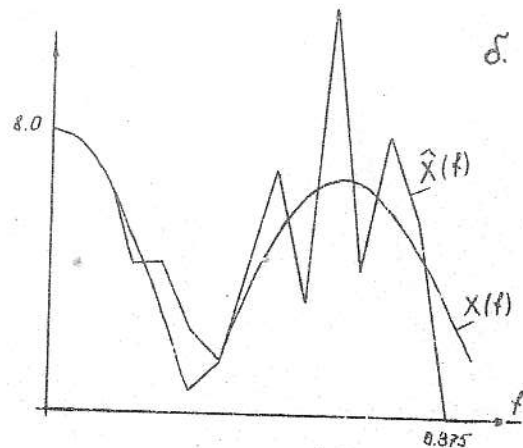


Рис.2. Реставрация методом инверсной фильтрации при квантовании выходного сигнала $y(t)$



а.



б.

Рис.3. Реставрация методом инверсной фильтрации с ограничением полосы частот при квантовании выходного сигнала $y(t)$; частота среза $f_c = 0.875$ гц
 а) -результат реставрации во временной области,
 б) -результат реставрации в частотной области.

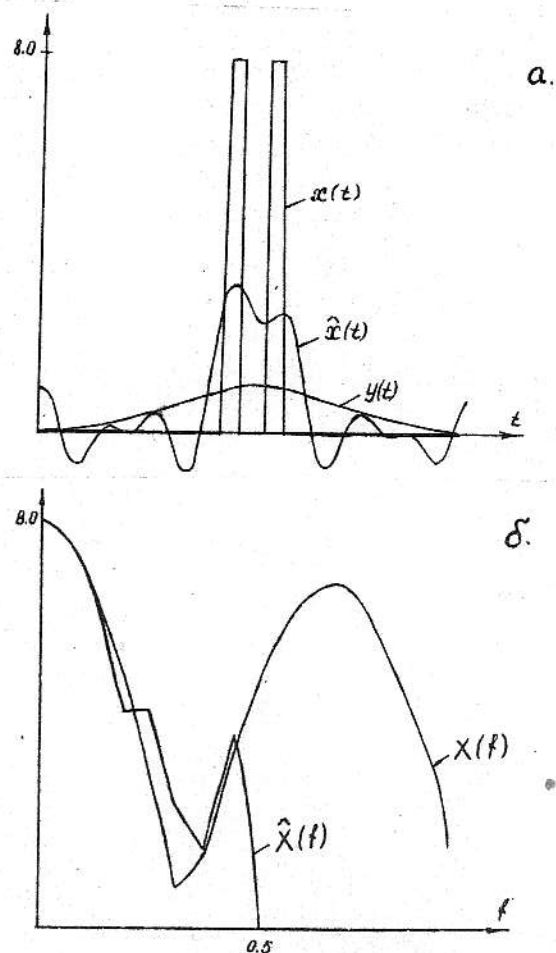


Рис.4. Реставрация методом инверсной фильтрации с ограничением полосы частот при квантовании выходного сигнала $y(t)$; частота среза $f_c = 0.5$ гц
а) -результат реставрации во временной области
б) -результат реставрации в частотной области.

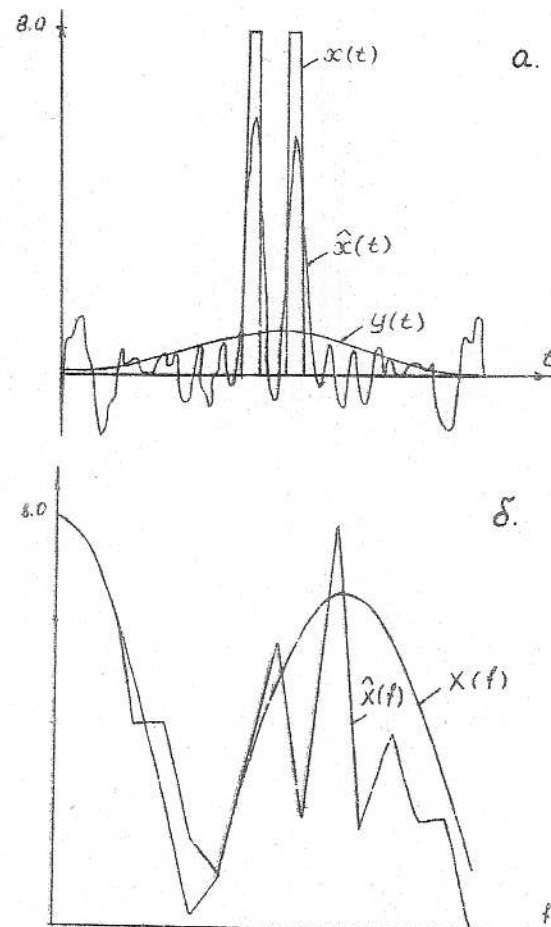


Рис.5. Реставрация методом Тихонова при квантовании выходного сигнала $y(t)$.
а) -результат реставрации во временной области
б) -результат реставрации в частотной области.

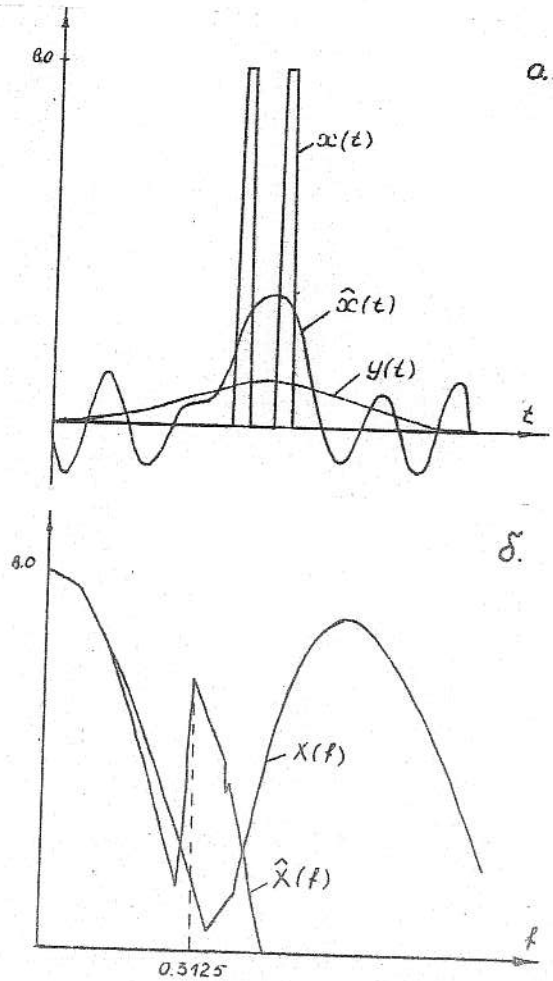


Рис.6. Реставрация методом Тихонова при наложении внешней помехи на выходной сигнал $y(t)$.
 а) Результат реставрации во временной области,
 б) Результат реставрации в частотной области.
 Здесь хорошо проявляется оставшийся шум на частоте $f_1 = 0.3125$ гц.

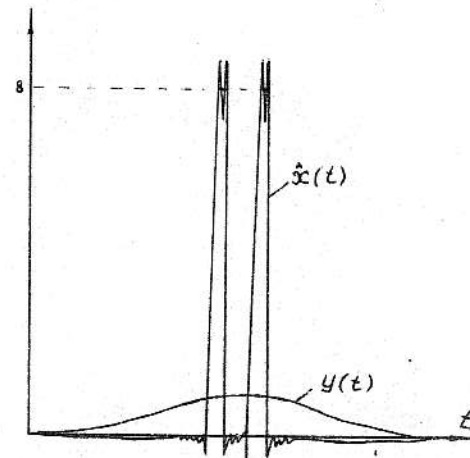


Рис.7. Реставрация с использованием аналитического продолжения по методу Айзенберга

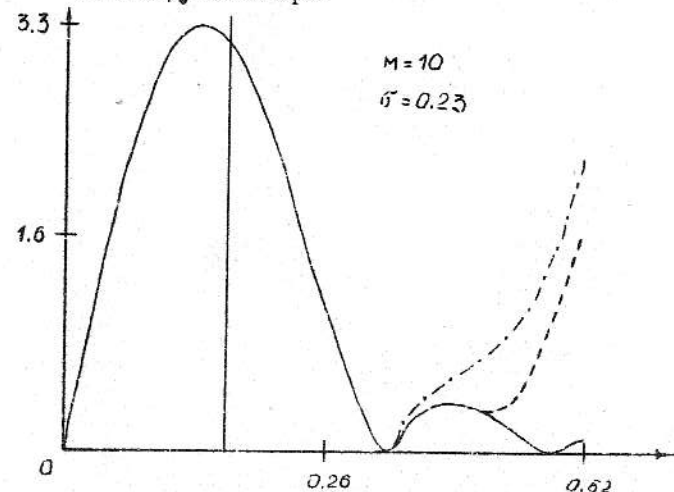


Рис.8. Пример экстраполяции спектра конечного сигнала.
 ———— - модуль точной функции; — — - модуль функции, полученной экстраполяцией по формуле Айзенберга;
 - · - · - модуль функции, полученной решением разностного уравнения (8)

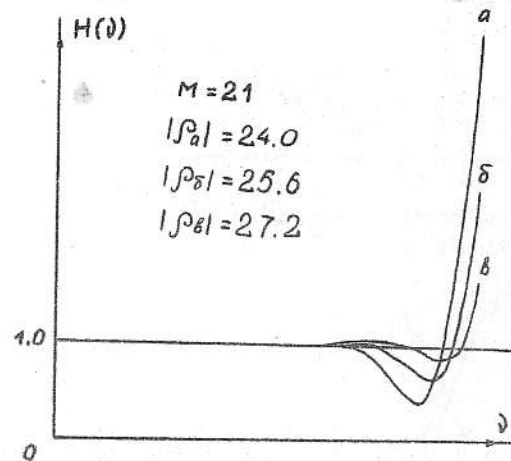


Рис.9. Передаточные функции алгоритма экстраполяции (10) при различных значениях параметра ρ

Ответственный за выпуск Кравцов Б.А.

660036, г.Красноярск, Академгородок,
Институт физики им.Л.В.Киренского СО АН СССР

Заказ № 14 Объем п.л. 1.0 Тираж 250 экз

Подписано к печати 11.01.88 Ал № 01007